

Potenzen und Wurzeln

Potenzen

- Fachbegriffe:
 - a^n als Ganzes: Potenz (gesprochen: „a hoch n“)
 - a: Basis
 - n: Exponent (Hochzahl)
- Definition:
 - Eine Potenz ist eine Kurzschreibweise für ein Produkt mit gleichen Faktoren.
 - Für $a \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sim a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a \quad [n \text{ Faktoren } a]$$

$$\sim a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{a^n} \cdot \dots \cdot \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

- Außerdem gilt per Definition für $a \neq 0$: $a^0 = 1$.

- Beispiele:

- $a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$
- $3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$
- $(-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -125$
- $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$
- $(\sqrt{3})^5 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3 \cdot 3 \sqrt{3} = 9 \sqrt{3}$

$$- a^{-5} = \frac{1}{a^5} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \left(\frac{1}{a}\right)^5$$

$$- 3^{-5} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243}$$

$$- \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^4} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{1}{\frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}} = \frac{1}{\frac{16}{81}} = \frac{81}{16} = 5 \frac{1}{16}$$

- Sonderfälle: Rechnen mit 0 und 1:

- $a^0 = 1$ (per Definition für $a \neq 0$, s. o.)
- $a^1 = a$

- $1^0 = 1$
- $1^1 = 1$
- $0^0 = \text{nicht definiert}$
- $0^1 = 0$
- $0^3 = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$
- $0^n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}^+$ (also alle positiven natürlichen Exponenten)
- $0^{-n} = \text{nicht definiert}$ für alle $n \in \mathbb{N}^+$, denn dann wäre $0^{-n} = \frac{1}{0^n} = \frac{1}{0}$, doch die Division durch Null ist nicht definiert.
- $\left(\frac{12}{17}\right)^0 = 1$
- $12^1 = 12$
- $1^{12} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$
- Unterscheide Potenz und Produkt:
 - Potenz: $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$
 - Produkt: $2 \cdot 5 = 5 + 5 = 10$
 $\quad \quad \quad = 5 \cdot 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$

- Potenzen, die man auswendig wissen könnte:

$2^2 = 4$	$2^6 = 64$	$2^{10} = 1024$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	$5^2 = 25$
$2^3 = 8$	$2^7 = 128$	≈ 1000	$3^3 = 27$	$4^3 = 64$	$5^3 = 125$
$2^4 = 16$	$2^8 = 256$		$3^4 = 81$	$4^4 = 256$	$5^4 = 625$
$2^5 = 32$	$2^9 = 512$		$3^5 = 243$	$4^5 = 1.024$	$= 25^2$

- Zehnerpotenzen:
 - Die Zahlen 10, 100, 1000 usw. schreibt man häufig übersichtlich als Potenz zur Basis 10. Sie werden Zehnerpotenzen genannt.

$$\begin{aligned}
 10 &= 10 = 10^1 \\
 100 &= 100 = 10^2 \\
 1.000 &= 1.000 = 10^3 &= 1 \text{ Tausend} \\
 10.000 &= 10.000 = 10^4 \\
 1.000.000 &= 100.000 = 10^5 \\
 1.000.000 &= 1.000.000 = 10^6 &= 1 \text{ Million} \\
 1.000.000.000 &= 1.000.000.000 = 10^9 &= 1 \text{ Milliarde}
 \end{aligned}$$

$$1.000.000.000.000 = 10^{12} = 1 \text{ Billion}$$

- 10^n bedeutet also eine 1 mit n Nullen dahinter.
- Bestimmte Vorsilben bei Maßeinheiten bedeuten Zehnerpotenzen:

Potenz	Vorsilbe	Abkürzung	Beispiel
10^2	Hekto	h	Hektoliter: 1 hl = 10^2 l
10^3	Kilo	k	Kilometer: 1 km = 10^3 m
10^6	Mega	M	Megawatt: 1 MW = 10^6 W
10^9	Giga	G	Gigahertz: 1 GHz = 10^9 Hz
10^{12}	Tera	T	Terabit: 1 Tbit = 10^{12} bit

Potenzgesetze I: gleiche Basis, unterschiedlicher Exponent

- Für eine Basis $a \neq 0$ und ganzzahlige Exponenten n und m gilt:
 - Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert und die Basis beibehält: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
 - Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man die Exponenten subtrahiert und die Basis beibehält: $a^n : a^m = a^{n-m}$
 - Potenzen werden potenziert, indem man die Exponenten multipliziert und die Basis beibehält: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
- Beispiele:
 - $a^5 \cdot a^3 = (a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^{5+3} [= a^8]$
 - $2^5 \cdot 2^3 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{5+3} [= 2^8 = 256]$
 - $2^5 \cdot 2^{-3} = \frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^{5+(-3)} [= 2^2 = 4]$
 - $2^{-5} \cdot 2^{-3} = \frac{1}{2^5} \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2^5 \cdot 2^3} = \frac{1}{2^{5+3}} = 2^{-(5+3)} = 2^{-5-3} = 2^{-5+(-3)} [= 2^{-8} = \frac{1}{2^8} = \frac{1}{256}]$
 - $a^5 : a^3 = \frac{a^5}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = \frac{a^{5-3}}{1} = a^{5-3} [= a^2]$
 - $2^5 : 2^3 = \frac{2^5}{2^3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{2^{5-3}}{1} = 2^{5-3} [= 2^2 = 4]$
 - $2^5 : 2^{-3} = \frac{2^5}{2^{-3}} = \frac{2^5}{\frac{1}{2^3}} = 2^5 \cdot \frac{2^3}{1} = 2^5 \cdot 2^3 = 2^{5+3} = 2^{5+(-(-3))} [= 2^8 = 256]$

$$- 2^{-5} : 2^{-3} = \frac{2^{-5}}{2^{-3}} = 2^{-5} \cdot 2^3 = 2^{-5+3} = 2^{-5 \cdot (-3)} [= 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}]$$

bzw. (inkl. kleine Rechenabkürzung am Ende):

$$\dots = \frac{2^{-5}}{2^{-3}} = \frac{\frac{1}{2^5}}{\frac{1}{2^3}} = \frac{1}{2^5} : \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2^5} \cdot \frac{2^3}{1} = \frac{2^3}{2^5} [= \frac{8}{32} = \frac{1}{4}]$$

Daraus folgt: $\frac{2^{-5}}{2^{-3}} = \frac{2^3}{2^5} \rightarrow \frac{a^{-n}}{a^{-m}} = \frac{a^m}{a^n}$

$$- (a^5)^3 = (a^5) \cdot (a^5) \cdot (a^5) = (a)^{5+5+5} = a^{3 \cdot 5} = a^{5 \cdot 3} [= a^{15}]$$

$$- (2^5)^3 = (2^5) \cdot (2^5) \cdot (2^5) = (2)^{5+5+5} = 2^{3 \cdot 5} = 2^{5 \cdot 3} [= 2^{15} = 32.768]$$

$$- (2^5)^{-3} = \frac{1}{(2^5)^3} = \frac{1}{(2^5) \cdot (2^5) \cdot (2^5)} = \frac{1}{(2)^{5+5+5}} = \frac{1}{2^{3 \cdot 5}} = \frac{1}{2^{5 \cdot 3}} = 2^{5 \cdot (-3)} [= 2^{-15} = \frac{1}{2^{15}} = \frac{1}{32.768}]$$

$$- (2^{-5})^{-3} = \frac{1}{(2^{-5})^3} = \frac{1}{(2^{-5}) \cdot (2^{-5}) \cdot (2^{-5})} = \frac{1}{(2)^{(-5)+(-5)+(-5)}} = \frac{1}{2^{3 \cdot (-5)}} = \frac{1}{2^{-5 \cdot 3}} = 2^{5 \cdot 3} = 2^{-5 \cdot (-3)} [= 2^{15} = 32.768]$$

- Vorsicht bei „Doppelpotenzen“, denn es gilt:

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} \neq a^{n^m}$$

Beispiel:

$$(2^5)^3 = 2^{5 \cdot 3} = 2^{15}, \text{ aber } 2^{5^3} = 2^{125}$$

Exkurs: Hierarchie der Rechenoperationen

- Damit mathematische Ausdrücke eindeutig berechnet werden können, gilt eine feste Reihenfolge der Rechenoperationen.
 - Klammern
 - Geschachtelte Klammern werden von innen nach außen berechnet, also zuerst die inneren, dann die äußeren Klammern.
 - Potenzen und Wurzeln
 - Potenzen (z. B. a^2) und Wurzeln (z. B. $\sqrt{a}$) haben dieselbe Rangstufe.
 - Geschachtelte Potenzen werden von rechts nach links gerechnet (Rechtsassoziativität).
 - Punktrechnung
 - Multiplikation ($\cdot$) und Division ($:$) haben dieselbe Rangstufe.

- Mehrere hintereinander stehende Punktrechnungen werden von links nach rechts gerechnet (Linksassoziativität).

4. Strichrechnung

- Addition (+) und Subtraktion (−) haben dieselbe Rangstufe
- Mehrere hintereinander stehende Strichrechnungen werden von links nach rechts gerechnet (Linksassoziativität).

• Beispiele

Mehrere Rangstufen und Linksassoziativität:

$$\begin{aligned}
 & 30 - 18 : 3 \cdot 2 + \sqrt{16} \\
 = & 30 - 18 : 3 \cdot 2 + 4 \\
 = & 30 - 6 \cdot 2 + 4 \\
 = & 30 - 12 + 4 \\
 = & 18 + 4 \\
 = & 22
 \end{aligned}$$

Hier wird deutlich: Die Wurzel wird vor der Punkt- und Strichrechnung ausgewertet. Division und Multiplikation sowie anschließend Subtraktion und Addition werden jeweils von links nach rechts berechnet.

Verschachtelte Klammern, Potenzen, Punkt- und Strichrechnung:

$$\begin{aligned}
 & 5 + (7 - (6 - 2))^2 : 9 \\
 = & 5 + (7 - 4)^2 : 9 \\
 = & 5 + 3^2 : 9 \\
 = & 5 + 9 : 9 \\
 = & 5 + 1 \\
 = & 6
 \end{aligned}$$

Zuerst wird die innere Klammer (6 − 2) berechnet, danach die äußere Klammer. Anschließend folgen Potenz und Division und zuletzt die Addition.

- Näheres siehe separates Papier „Hierarchie der Rechenoperationen“.

Potenzgesetze II: unterschiedliche Basis, gleicher Exponent

- Für beliebige Basen $a \neq 0$ und $b \neq 0$ und einen ganzzahligen Exponenten n gilt:
 - Potenzen mit gleichen Exponenten werden multipliziert, indem man ihre Basen multipliziert und den Exponenten beibehält: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
 - Potenzen mit gleichen Exponenten werden dividiert, indem man ihre Basen dividiert und den Exponenten beibehält: $a^n : b^n = \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

- Beispiele:

$$\begin{aligned}
 - a^4 \cdot b^4 &= (a \cdot a \cdot a \cdot a) \cdot (b \cdot b \cdot b \cdot b) = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) = (a \cdot b)^4 \\
 - 2^3 \cdot 5^3 &= (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5) = (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) = (2 \cdot 5)^3 [= 10^3 = 1.000] \\
 - 2^{-3} \cdot 5^{-3} &= \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{5^3} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} \cdot \frac{1}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{(2 \cdot 5)^3} = (2 \cdot 5)^{-3} [= 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1.000}]
 \end{aligned}$$

$$- a^4 : b^4 = \frac{a^4}{b^4} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b \cdot b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^4$$

$$- 2^3 : 5^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \left(\frac{2}{5}\right)^3 [= \frac{8}{125}]$$

$$\begin{aligned}
 - 2^{-3} : 5^{-3} &= \frac{2^{-3}}{5^{-3}} = \frac{\frac{1}{2^3}}{\frac{1}{5^3}} = \frac{1}{2^3} \cdot \frac{5^3}{1} = \frac{5^3}{2^3} = \left(\frac{5}{2}\right)^3 \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 : \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{5}}\right)^3 = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{1}\right)^3 = \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \left(\frac{5}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-3}
 \end{aligned}$$

$$[= \frac{125}{8} = 15 \frac{5}{8}]$$

bzw. (inkl. kleine Rechenabkürzung am Ende):

$$\dots = \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{5^3}{2^3} [= \frac{125}{8} = 15 \frac{5}{8}]$$

$$\text{Daraus folgt: } \frac{2^{-3}}{5^{-3}} = \frac{5^3}{2^3} \rightarrow \frac{a^{-n}}{b^{-n}} = \frac{b^n}{a^n}$$

Anwenden der Potenzgesetze bei Termumformungen: Forme mit Hilfe der Potenzgesetze um.

$$\begin{aligned}
 - 256 \cdot x^8 &= 2^8 \cdot x^8 = (2x)^8 \\
 - (x^2 \cdot y^4)^{-3} &= (x^2)^{-3} \cdot (y^4)^{-3} = x^{-6} \cdot y^{-12} = \frac{y^{12}}{x^6} \\
 - (a^m b^3)^5 &= (a^m)^5 \cdot (b^3)^5 = a^{5m} b^{15} \\
 - 4^2 \cdot (-3)^4 &= (2^2)^2 \cdot (-3)^4 = 2^4 \cdot (-3)^4 = (2 \cdot (-3))^4 = (-6)^4 = 6^4
 \end{aligned}$$

- Zur Erinnerung:

- Wird eine negative Zahl als Basis mit einem geraden Exponenten potenziert, so erhält man ein positives Ergebnis, z. B.

$$\sim (-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = 25$$

$$\sim (-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$$

$$\sim (-1)^6 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 1$$

- Wird eine negative Zahl als Basis mit einem ungeraden Exponenten potenziert, so

erhält man ein negatives Ergebnis, z. B.

$$\sim (-5)^1 = -5$$

$$\sim (-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$$

$$\sim (-1)^5 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$$

- Merke:

- ~ Bei einem geraden Exponenten lassen sich alle negativen Faktoren zu Paaren zusammenfassen. Jedes Faktorenpaar ergibt ein positives Ergebnis ($- \cdot - = +$). Daher ist auch das Gesamtergebnis positiv.
- ~ Bei einem ungeraden Exponenten bleibt ein negativer Faktor ohne Partner übrig. Daher ist das Gesamtergebnis negativ.

Exkurs: Wurzeln und Wurzelgesetze

• Fachbegriffe:

- $\sqrt[n]{a}$: als Ganzes: Wurzel (gesprochen: „n-te Wurzel aus a“)
- $\sqrt{}$: Wurzelzeichen
- a: Radikand [= der Term unter einer Wurzel]
- n: Wurzelexponent

• Wurzelarten:

- $\sqrt[1]{a} = a$ (Anm.: Wurzel hier überflüssig; zugleich gilt $a \geq 0$)
- $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a} \rightarrow$ Quadratwurzel (z. B. $\sqrt[2]{3} = \sqrt{3}$)
(Anm.: Quadratwurzel als „Standardwurzel“, daher kann auf die 2 im Wurzelexponent verzichtet werden und man spricht häufig nur verkürzt von „Wurzel“)
- $\sqrt[3]{a} \rightarrow$ Kubikwurzel
- $\sqrt[4]{a} \rightarrow$ vierte Wurzel
- $\sqrt[n]{a} \rightarrow$ n-te Wurzel

• Bedeutung von $\sqrt[n]{a}$:

- Welche nichtnegative Zahl muss man n-mal mit sich selbst multiplizieren, um a zu erhalten? Z. B.:
- $\sqrt[2]{256} = \sqrt{256} = 16$, weil $16 \cdot 16 = 256$ (Zweimal 16 mit sich selbst multipliziert ergibt 256)
- $\sqrt[5]{1.024} = 4$, weil $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 1.024$ (Fünfmal 4 mit sich selbst multipliziert ergibt 1.024)

• Sonderfälle: Rechnen mit 0 und 1:

- $\sqrt[0]{1} =$ nicht definiert
- $\sqrt[1]{1} = 1$
- $\sqrt[0]{0} =$ nicht definiert
- $\sqrt[1]{0} = 0$

- $\sqrt[3]{0} = 0^{\frac{1}{3}} = 0$ (Näheres dazu s.u.)
- $\sqrt[0]{3}$ = nicht definiert
- Umkehrrechnungen:
 - Strichrechnung: Addition (+) $\leftrightarrow$ Subtraktion (-)
 - ~ $6 + 3 = 9$
 - ~ $9 - 3 = 6$
 - ~ Zusammen: $6 + 3 - 3 = 6$
 - Punktrechnung: Multiplikation (•) $\leftrightarrow$ Division (:)
 - ~ $6 : 3 = 2$
 - ~ $2 \cdot 3 = 6$
 - ~ Zusammen: $6 : 3 \cdot 3 = 6$
 - ~ Anm.: Divisor $\neq 0$ (damit keine Division durch Null)
 - Potenz ($\square^n$) $\leftrightarrow$ Wurzel ($\sqrt[n]{\square}$)
 - ~ $6^2 = 36$
 - ~ $\sqrt{36} = 6$
 - ~ Zusammen: $\sqrt{6^2} = 6$
 - ~ Anm.: $\square \geq 0$ (damit keine Wurzel aus negativer Zahl), $n \in \mathbb{N}^+$ (bei geraden n)
 - ~ Es gilt: $(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a$ (Näheres dazu s.u.)
- Multiplikationsregel (für $a, b \geq 0$):
 - $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, z. B.
 - $\sqrt{16} \cdot \sqrt{9} = \sqrt{16 \cdot 9} = \sqrt{144} = 12$
- Divisionsregel (für $a \geq 0, b > 0$):
 - $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, z. B.
 - $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{16}{4}} = \sqrt{4} = 2$
- Merke: Die Multiplikations- und Divisionsregel gelten nur für Multiplikation und Division von Wurzeln, nicht für Addition oder Subtraktion.
 - $\sqrt{x^2 \cdot y^2} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y^2} = xy$ (für $x, y \geq 0$),
aber

- $\sqrt{x^2+y^2}$ lässt sich nicht weiter vereinfachen.
- Distributivgesetz: Ausmultiplizieren (für $a, b, c \geq 0$):
 - $\sqrt{a} \cdot (\sqrt{b} + \sqrt{c}) = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + \sqrt{a} \cdot \sqrt{c} = \sqrt{ab} + \sqrt{ac}$, z. B.
 - $\sqrt{3} \cdot (\sqrt{27} + \sqrt{3}) = \sqrt{3} \cdot \sqrt{27} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3 \cdot 27} + \sqrt{3 \cdot 3} = \sqrt{81} + \sqrt{9} = 9 + 3 = 12$
- Distributivgesetz: Ausklammern (für $a \geq 0$):
 - $x \cdot \sqrt{a} + y \cdot \sqrt{a} = (x+y) \cdot \sqrt{a}$, z. B.
 - $6 \cdot \sqrt{7} + 4 \cdot \sqrt{7} = (6+4) \cdot \sqrt{7} = 10 \sqrt{7}$
- Teilweises Wurzelziehen (für $a \geq 0$):
 - $\sqrt{ab^2} = \sqrt{b} \cdot \sqrt{a^2} = a \sqrt{b}$, z. B.
 - $\sqrt{54} = \sqrt{9 \cdot 6} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{6} = 3 \sqrt{6}$

Anm.: Ziel ist eine Multiplikation mit einer Quadratzahl als Faktor (hier: 9).

$$- \sqrt{5x^2} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{x^2} = x \sqrt{5} \text{ (für } x \geq 0 \text{)}$$

Potenzgesetze III: Potenzen mit rationalen Exponenten

- Für $a \geq 0$; $n \in \mathbb{N}^+$ und $m \in \mathbb{N}_0$ gilt:
 - $\sqrt[n]{a}$ bezeichnet diejenige nichtnegative Zahl, deren n-te Potenz gleich a ist. Die n-te Wurzel aus a lässt sich als Potenz schreiben: $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^1} = a^{\frac{1}{n}}$
 - $a^{\frac{m}{n}}$ ist die n-te Wurzel aus a^m oder die m-te Potenz von $\sqrt[n]{a}$: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

Daraus folgt für $a > 0$:

$$- \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^1}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = a^{-\frac{1}{n}}$$

$$- a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{(\sqrt[n]{a})^m}$$

- Beispiele:

$$- \sqrt{a} = \sqrt[2]{a} = \sqrt[2]{a^1} = a^{\frac{1}{2}}$$

$$- \sqrt{25} = \sqrt[2]{25} = \sqrt[2]{25^1} = 25^{\frac{1}{2}} \text{ [= 5, weil } 5 \cdot 5 = 25 \text{]}$$

- $\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{64^1} = 64^{\frac{1}{6}} \quad [= 2, \text{ weil } 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64]$
- $1.000^{\frac{2}{3}} = 1.000^{2 \cdot \frac{1}{3}} = (1.000^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{1.000^2} = \sqrt[3]{1.000.000} = 100$
oder
 $1.000^{\frac{2}{3}} = 1.000^{\frac{1}{3} \cdot 2} = (1.000^{\frac{1}{3}})^2 = (\sqrt[3]{1.000})^2 = 10^2 = 100$

Daraus folgt: $\sqrt[3]{1.000^2} = (\sqrt[3]{1.000})^2$ (Vgl. Umkehrrechnungen Potenz $\leftrightarrow$ Wurzel oben.)

- $0,001^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{0,001^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{0,001^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{0,000001}} = \frac{1}{0,01} = \frac{1}{\frac{1}{100}} = 100$

Potenzgesetze bei Potenzen mit rationalen Exponenten anwenden: Vereinfache. Gib das Ergebnis in Wurzelschreibweise an.

- $a^{\frac{1}{4}} : a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{4} - \frac{2}{4}} = a^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{a}}$
- $(a^5 b^{-3})^{-\frac{1}{6}} = a^{-\frac{5}{6}} \cdot b^{\frac{3}{6}} = a^{-\frac{5}{6}} \cdot b^{\frac{1}{2}} = b^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{5}{6}} = \frac{b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{5}{6}}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt[6]{a^5}}$

Wurzelterme mithilfe der Potenzgesetze umformen: Vereinfache.

- $\sqrt[4]{a^6} \cdot \sqrt{a^5} = a^{\frac{6}{4}} \cdot a^{\frac{5}{2}} = a^{\frac{3}{2}} \cdot a^{\frac{5}{2}} = a^{\frac{8}{2}} = a^4$
- $\sqrt[3]{\sqrt{x^5}} = (x^2)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{3}} = x^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{x^5}$