

Hierarchie der Rechenoperationen

Damit mathematische Ausdrücke eindeutig berechnet werden können, gilt eine feste Reihenfolge der Rechenoperationen.

Reihenfolge der Rechenoperationen

1. Klammern

Geschachtelte Klammern werden **von innen nach außen** berechnet, also zuerst die inneren, dann die äußeren Klammern.

2. Potenzen und Wurzeln

Potenzen (z. B. a^2) und Wurzeln (z. B. $\sqrt{a}$) haben dieselbe Rangstufe.

3. Punktrechnung

Multiplikation ($\cdot$) und Division ($:$) haben dieselbe Rangstufe.

4. Strichrechnung

Addition (+) und Subtraktion (−) haben dieselbe Rangstufe.

Rechenoperationen gleicher Rangstufe

Stehen mehrere Rechenoperationen derselben Rangstufe hintereinander, gelten folgende Regeln:

- **Addition** und **Subtraktion** werden **von links nach rechts** berechnet.
- **Multiplikation** und **Division** werden ebenfalls **von links nach rechts** berechnet.

Diese Eigenschaft bezeichnet man als **Linksassoziativität**.

Beispiele:

$20 - 5 + 3$	Falsch:	$20 - 5 + 3$
$= 15 + 3$		$= 20 - 8$
$= 18$		$= 12$

$24 : 6 \cdot 2$	Falsch:	$24 : 6 \cdot 2$
$= 4 \cdot 2$		$= 24 : 12$
$= 8$		$= 2$

- **Potenzen** und **Wurzeln**: Treten sie **unabhängig** voneinander in einem Term auf, ist **keine bestimmte Reihenfolge** vorgeschrieben.

Beispiel:

$$\begin{array}{ll} \sqrt{121} + 4^3 & \text{oder:} \quad \sqrt{121} + 4^3 \\ = 11 + 4^3 & = \sqrt{121} + 64 \\ = 11 + 64 & = 11 + 64 \\ = 75 & = 75 \end{array}$$

Besonderheit bei Potenzen

Bei mehreren ineinander geschachtelten Potenzen gilt eine besondere Regel: Sie werden **von rechts nach links** ausgewertet.

$$a^{b^c} = a^{(b^c)}$$

Man spricht von **Rechtsassoziativität**.

Beispiel:

$$2^{3^2} = 2^9 = 512 \quad \text{Falsch:} \quad 2^{3^2} = 8^2 = 64$$

Hinweis:

Durch Klammern kann eine andere Reihenfolge ausdrücklich festgelegt werden.

Beispiel:

$$(2^3)^2 = 8^2 = 64$$

Kombinierte Beispiele

Beispiel 1 – Punktrechnung vor Strichrechnung:

$$\begin{array}{l} 5 + 3 \cdot 4 \\ = 5 + 12 \\ = 17 \end{array}$$

Die Multiplikation wird vor der Addition ausgeführt.

Beispiel 2 – Klammern haben Vorrang:

$$\begin{array}{l} 4 \cdot (5 + 3) \\ = 4 \cdot 8 \\ = 32 \end{array}$$

Die Klammer wird zuerst berechnet.

Beispiel 3 – Potenzen vor Punkt- und Strichrechnung:

$$\begin{aligned} & 2 + 4 \cdot 3^2 \\ = & 2 + 4 \cdot 9 \\ = & 2 + 36 \\ = & 38 \end{aligned}$$

Zuerst die Potenz, dann die Multiplikation, zuletzt die Addition.

Beispiel 4 – Wurzeln und Division:

$$\begin{aligned} & 18 - \sqrt{81} : 3 \\ = & 18 - 9 : 3 \\ = & 18 - 3 \\ = & 15 \end{aligned}$$

Zuerst die Wurzel, danach die Division, zuletzt die Subtraktion.

Beispiel 5 – Verschachtelte Klammern:

$$\begin{aligned} & 6 \cdot 3 + (8 - (9 - 2)) \\ = & 6 \cdot 3 + (8 - 7) \\ = & 6 \cdot 3 + 1 \\ = & 18 + 1 \\ = & 19 \end{aligned}$$

Zuerst wird die innere Klammer $(9 - 2)$ berechnet, danach die äußere Klammer. Anschließend folgen Multiplikation und Addition.

Beispiel 6 – Alle Rangstufen kombiniert:

$$\begin{aligned} & 2^3 + \sqrt{49} \cdot (8 - 5) \\ = & 2^3 + \sqrt{49} \cdot 3 \\ = & 8 + \sqrt{49} \cdot 3 \\ = & 8 + 7 \cdot 3 \\ = & 8 + 21 \\ = & 29 \end{aligned}$$

Zuerst die Klammer, dann Potenz und Wurzel, anschließend die Multiplikation und zuletzt die Addition. Potenz und Wurzel sind hier unabhängig voneinander und können daher in beliebiger Reihenfolge berechnet werden.

Beispiel 7 – Mehrere Rangstufen und Linksassoziativität:

$$\begin{aligned} & 30 - 18 : 3 \cdot 2 + \sqrt{16} \\ = & 30 - 18 : 3 \cdot 2 + 4 \\ = & 30 - 6 \cdot 2 + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 30 - 12 + 4 \\ &= 18 + 4 \\ &= 22 \end{aligned}$$

Hier wird deutlich: Die Wurzel wird vor der Punkt- und Strichrechnung ausgewertet. Division und Multiplikation sowie anschließend Subtraktion und Addition werden jeweils von links nach rechts berechnet.

Beispiel 8 – Verschachtelte Klammern, Potenzen, Punkt- und Strichrechnung:

$$\begin{aligned} &5 + (7 - (6 - 2))^2 : 9 \\ &= 5 + (7 - 4)^2 : 9 \\ &= 5 + 3^2 : 9 \\ &= 5 + 9 : 9 \\ &= 5 + 1 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Zuerst wird die innere Klammer $(6 - 2)$ berechnet, danach die äußere Klammer. Anschließend folgen Potenz und Division und zuletzt die Addition.

Zusammenfassung

Klammern zuerst → Potenzen/Wurzeln → Punkt vor Strich

Klammern → von innen nach außen

+ und – sowie • und : → von links nach rechts

geschachtelte Potenzen → von rechts nach links

Übungen

Aufgabe 01

$$18 + 24 : 6 \cdot 3$$

Aufgabe 02

$$42 - 16 + 7 - 5$$

Aufgabe 03

$$48 : (6 \cdot 4) + 5$$

Aufgabe 04

$$36 : 2^2 + 5 \cdot 3$$

Aufgabe 05

$$25 - \sqrt{81} + 3 \cdot 4$$

Aufgabe 06

$$4 + (11 - 5) \cdot 7$$

Aufgabe 07

$$3 + (9 - 5)^2 : 4$$

Aufgabe 08

$$40 - \sqrt{64} : 2 + 3^2$$

Aufgabe 09

$$6 \cdot 3 + (8 - (9 - 4))$$

Aufgabe 10

$$2^3 + \sqrt{49} \cdot (10 - 6)$$

Aufgabe 11

$$60 : 5 \cdot 2 - 18 : 3$$

Aufgabe 12

$$35 - 18 : 3 \cdot 4 + 7$$

Aufgabe 13

$$\sqrt{81} - 24 : 6 + 2^4$$

Aufgabe 14

$$2^{(3^2)} \text{ [„2 hoch } 3^2\text{“]}$$

Aufgabe 15

$$(2^3)^2$$

Aufgabe 16

$$5 + (8 - (6 - 2))^2 : 4$$

Aufgabe 17

$$45 : (2 + \sqrt{169}) + 3^2 \cdot 2$$

Aufgabe 18

$$0,75 \cdot (29 - 3^3) + \sqrt{225}$$

Aufgabe 19

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{9} + (7 - 4)^2 - 5$$

Aufgabe 20

$$36 : (2 + \sqrt{16}) + 2^3 \cdot (7 - (5 - 2)) - 4$$

Lösungen

Aufgabe 01

$$\begin{aligned} & 18 + 24 : 6 \cdot 3 \\ = & 18 + 4 \cdot 3 \\ = & 18 + 12 \\ = & 30 \end{aligned}$$

Division und Multiplikation haben dieselbe Rangstufe und werden von links nach rechts berechnet.

Aufgabe 02

$$\begin{aligned} & 42 - 16 + 7 - 5 \\ = & 26 + 7 - 5 \\ = & 33 - 5 \\ = & 28 \end{aligned}$$

Addition und Subtraktion haben dieselbe Rangstufe und werden von links nach rechts berechnet.

Aufgabe 03

$$\begin{aligned} & 48 : (6 \cdot 4) + 5 \\ = & 48 : 24 + 5 \\ = & 2 + 5 \\ = & 7 \end{aligned}$$

Die Klammer wird zuerst berechnet. Erst danach folgen Division und Addition.

Aufgabe 04

$$\begin{aligned} & 36 : 2^2 + 5 \cdot 3 \\ = & 36 : 4 + 5 \cdot 3 \\ = & 9 + 5 \cdot 3 \\ = & 9 + 15 \\ = & 24 \end{aligned}$$

Zuerst wird die Potenz berechnet, anschließend die Punktrechnung, zuletzt die Addition.

Aufgabe 05

$$\begin{aligned} & 25 - \sqrt{81} + 3 \cdot 4 \\ = & 25 - 9 + 3 \cdot 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 25 - 9 + 12 \\ &= 16 + 12 \\ &= 28 \end{aligned}$$

Zuerst werden Wurzel und Multiplikation entsprechend ihrer Rangstufen ausgewertet. Addition und Subtraktion werden anschließend von links nach rechts berechnet.

Aufgabe 06

$$\begin{aligned} &4 + (11 - 5) \cdot 7 \\ &= 4 + 6 \cdot 7 \\ &= 4 + 42 \\ &= 46 \end{aligned}$$

Zuerst wird die Klammer berechnet, danach die Multiplikation und zuletzt die Addition.

Aufgabe 07

$$\begin{aligned} &3 + (9 - 5)^2 : 4 \\ &= 3 + 4^2 : 4 \\ &= 3 + 16 : 4 \\ &= 3 + 4 \\ &= 7 \end{aligned}$$

Reihenfolge: Klammer $\rightarrow$ Potenz $\rightarrow$ Division $\rightarrow$ Addition.

Aufgabe 08

$$\begin{aligned} &40 - \sqrt{64} : 2 + 3^2 \\ &= 40 - 8 : 2 + 9 \\ &= 40 - 4 + 9 \\ &= 36 + 9 \\ &= 45 \end{aligned}$$

Potenz und Wurzel werden vor Punkt- und Strichrechnung ausgewertet.

Aufgabe 09

$$\begin{aligned} &6 \cdot 3 + (8 - (9 - 4)) \\ &= 6 \cdot 3 + (8 - 5) \\ &= 6 \cdot 3 + 3 \\ &= 18 + 3 \\ &= 21 \end{aligned}$$

Bei verschachtelten Klammern wird von innen nach außen gerechnet: zuerst die innere, danach die äußere Klammer. Anschließend folgen Multiplikation und Addition.

Aufgabe 10

$$\begin{aligned} & 2^3 + \sqrt{49} \cdot (10 - 6) \\ = & 2^3 + \sqrt{49} \cdot 4 \\ = & 8 + \sqrt{49} \cdot 4 \\ = & 8 + 7 \cdot 4 \\ = & 8 + 28 \\ = & 36 \end{aligned}$$

Nach der Klammer werden Potenz und Wurzel ausgewertet. Sie sind hier voneinander unabhängig und können in beliebiger Reihenfolge berechnet werden.

Aufgabe 11

$$\begin{aligned} & 60 : 5 \cdot 2 - 18 : 3 \\ = & 12 \cdot 2 - 18 : 3 \\ = & 24 - 18 : 3 \\ = & 24 - 6 \\ = & 18 \end{aligned}$$

Die Punktrechnungen werden vor der Subtraktion ausgeführt. Bei Division und Multiplikation wird von links nach rechts gerechnet.

Aufgabe 12

$$\begin{aligned} & 35 - 18 : 3 \cdot 4 + 7 \\ = & 35 - 6 \cdot 4 + 7 \\ = & 35 - 24 + 7 \\ = & 11 + 7 \\ = & 18 \end{aligned}$$

Zuerst erfolgt die Punktrechnung von links nach rechts, anschließend die Strichrechnung von links nach rechts.

Aufgabe 13

$$\begin{aligned} & \sqrt{81} - 24 : 6 + 2^4 \\ = & 9 - 24 : 6 + 2^4 \\ = & 9 - 24 : 6 + 16 \\ = & 9 - 4 + 16 \\ = & 5 + 16 \\ = & 21 \end{aligned}$$

Wurzel und Potenz sind voneinander unabhängig und werden vor der Punkt- und Strichrechnung ausgewertet. Danach folgt die Division und anschließend die Strichrechnung von links nach rechts.

Aufgabe 14

$$\begin{aligned} & 2^{(3^2)} \text{ [„2 hoch } 3^2\text{“]} \\ &= 2^9 \\ &= 512 \end{aligned}$$

Bei geschachtelten Potenzen wird von rechts nach links ausgewertet.

Aufgabe 15

$$\begin{aligned} & (2^3)^2 \\ &= 8^2 \\ &= 64 \end{aligned}$$

Hier bestimmen die Klammern ausdrücklich eine andere Reihenfolge als bei Aufgabe 14. Daher wird zuerst 2^3 und anschließend das Ergebnis quadriert.

Aufgabe 16

$$\begin{aligned} & 5 + (8 - (6 - 2))^2 : 4 \\ &= 5 + (8 - 4)^2 : 4 \\ &= 5 + 4^2 : 4 \\ &= 5 + 16 : 4 \\ &= 5 + 4 \\ &= 9 \end{aligned}$$

Reihenfolge: innere Klammer $\rightarrow$ äußere Klammer $\rightarrow$ Potenz $\rightarrow$ Division $\rightarrow$ Addition.

Aufgabe 17

$$\begin{aligned} & 45 : (2 + \sqrt{169}) + 3^2 \cdot 2 \\ &= 45 : (2 + 13) + 3^2 \cdot 2 \\ &= 45 : 15 + 3^2 \cdot 2 \\ &= 45 : 15 + 9 \cdot 2 \\ &= 3 + 18 \\ &= 21 \end{aligned}$$

Innerhalb der Klammer wird zunächst die Wurzel ausgewertet. Danach kann die Klammer berechnet werden. Anschließend folgen die Potenz und beide Punktrechnungen, zuletzt die Addition.

Aufgabe 18

$$\begin{aligned} & 0,75 \cdot (29 - 3^3) + \sqrt{225} \\ &= 0,75 \cdot (29 - 27) + \sqrt{225} \\ &= 0,75 \cdot 2 + \sqrt{225} \\ &= 0,75 \cdot 2 + 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 1,5 + 15 \\ &= 16,5 \end{aligned}$$

Innerhalb der Klammer wird zunächst die Potenz ausgewertet. Die Wurzel kann davon unabhängig berechnet werden. Anschließend folgen Multiplikation und Addition.

Aufgabe 19

$$\begin{aligned} &\frac{2}{3} : \frac{4}{9} + (7-4)^2 - 5 \\ &= \frac{2}{3} : \frac{4}{9} + 3^2 - 5 \\ &= \frac{2}{3} : \frac{4}{9} + 9 - 5 \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4} + 9 - 5 \\ &= 1,5 + 9 - 5 \\ &= 10,5 - 5 \\ &= 5,5 \end{aligned}$$

Zuerst wird die Klammer berechnet, anschließend die Potenz. Bei der Division durch einen Bruch wird mit dem Kehrwert multipliziert; die Division gehört weiterhin zur Punktrechnung. Abschließend wird die Strichrechnung von links nach rechts ausgeführt.

Aufgabe 20

$$\begin{aligned} &36 : (2 + \sqrt{16}) + 2^3 \cdot (7 - (5 - 2)) - 4 \\ &= 36 : (2 + 4) + 2^3 \cdot (7 - 3) - 4 \\ &= 36 : 6 + 2^3 \cdot 4 - 4 \\ &= 36 : 6 + 8 \cdot 4 - 4 \\ &= 6 + 32 - 4 \\ &= 38 - 4 \\ &= 34 \end{aligned}$$

Hier werden die zentralen Regeln kombiniert: Klammern von innen nach außen → Potenzen/Wurzeln → Punkt vor Strich. Bei gleichrangigen Rechenoperationen der Punkt- bzw. Strichrechnung wird von links nach rechts gerechnet.