Pfad- und Summenregel: mehrschichtige Beispielaufgabe

Aufgabe

Beim heutigen Abschlusstraining seiner Basketballmannschaft ist Micha aufgeregt: Er möchte seinem Trainer unbedingt zeigen, was er kann. Dazu hat er 5 Freiwürfe. Aus Erfahrung weiß Micha, dass er bei jedem Freiwurf mit einer Wahrscheinlichkeit von 70 % trifft (die einzelnen Würfe werden als voneinander unabhängig betrachtet).

Berechne folgende Wahrscheinlichkeiten: Micha trifft...

a) A: jedes Mal
b) B: kein Mal
c) C: nur beim ersten Mal
d) D: genau ein Mal
e) E: mindestens ein Mal
f) F: maximal ein Mal
g) G: mindestens zwei Mal
h) H: maximal vier Mal

Lösung

Anm.: T: trifft; N: trifft nicht

„Mindestens“ und „maximal“

Bei fünf Würfen bedeutet:
- Mindestens ein Mal: 1, 2, 3, 4 oder 5
- Mindestens zwei Mal: 2, 3, 4 oder 5
- Maximal ein Mal: 0 oder 1
- Maximal vier Mal: 0, 1, 2, 3 oder 4

Merke:
- Mindestens bedeutet: der angegebene Wert oder mehr.
- Maximal bedeutet: der angegebene Wert oder weniger.

a) A: trifft jedes Mal – 1 möglicher Pfad:
T – T – T – T – T

$$\begin{aligned} & P(A) \\ = \ & 0{,}7^5 \\ = \ & 0{,}16807 \\ \approx \ & 16{,}8\ \% \end{aligned}$$

b) B: trifft kein Mal – 1 möglicher Pfad:
N – N – N – N – N

$$\begin{aligned} & P(B) \\ = \ & 0{,}3^5 \\ = \ & 0{,}00243 \\ \approx \ & 0{,}2\ \% \end{aligned}$$

c) C: trifft nur beim ersten Mal – 1 möglicher Pfad:
T – N – N – N – N

$$
\begin{aligned}
& P(C) \\
= \; & 0{,}7 \cdot 0{,}3^4 \\
= \; & 0{,}00567 \\
\approx \; & 0{,}6\ \%
\end{aligned}
$$

d) D: trifft genau ein Mal – 5 mögliche Pfade:

T – N – N – N – N	N – T – N – N – N	N – N – T – N – N
N – N – N – T – N	N – N – N – N – T	

$$
\begin{aligned}
& P(D) \\
= \; & 5 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3^4 \\
= \; & 0{,}02835 \\
\approx \; & 2{,}8\ \%
\end{aligned}
$$

e) E: trifft mindestens ein Mal – hierbei gibt es zahlreiche Pfade, weswegen die Berechnung über das Gegenereignis wesentlich einfacher ist. Das Gegenereignis von „trifft mindestens ein Mal“ (E) lautet „trifft kein Mal“ (B, s. o.).

$$
\begin{aligned}
& P(E) \\
= \; & 1 - P(\overline{E}) \\
= \; & 1 - P(B) \\
= \; & 1 - 0{,}3^5 \\
= \; & 0{,}99757 \\
\approx \; & 99{,}8\ \%
\end{aligned}
$$

f) F: trifft maximal ein Mal – 6 gesuchte Ereignisse:

T – N – N – N – N	N – T – N – N – N	N – N – T – N – N
N – N – N – T – N	N – N – N – N – T	N – N – N – N – N

Wie man sieht, handelt es sich hierbei um eine Kombination aus „trifft ein Mal“ (D) und „trifft kein Mal“ (B, s. o.).

$$
\begin{aligned}
& P(F) \\
= \; & P(D) + P(B) \\
= \; & 5 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3^4 + 0{,}3^5 \\
= \; & 0{,}02835 + 0{,}00243 \\
= \; & 0{,}03078 \\
\approx \; & 3{,}1\ \%
\end{aligned}
$$

g) G: trifft mindestens zwei Mal – hierbei gibt es zahlreiche Ereignisse, weswegen die Berechnung über das Gegenereignis wesentlich einfacher ist. Das Gegenereignis von „trifft mindestens zwei Mal“ (G) lautet „trifft kein Mal“ (B, s. o.) **und** „trifft ein Mal“ (D, s. o.).

$$
\begin{aligned}
& P(G) \\
= \; & 1 - P(\overline{G}) \\
= \; & 1 - (P(B) + P(D))
\end{aligned}
$$

$= 1 – (0{,}3^5 + 5 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3^4)$
$= 1 – (0{,}00243 + 0{,}02835)$
$= 1 – 0{,}03078$
$= 0{,}96922$
$\approx 96{,}9\ \%$

h) H: trifft maximal vier Mal – hierbei gibt es zahlreiche Ereignisse, weswegen die Berechnung über das Gegenereignis wesentlich einfacher ist. Das Gegenereignis von „trifft maximal vier Mal“ (H) lautet „trifft jedes Mal“ (A, s. o.).

$P(H)$
$= 1 – P(\overline{H})$
$= 1 – P(A)$
$= 1 – 0{,}7^5$
$= 0{,}83193$
$\approx 83{,}2\ \%$