Arithmetisches Mittel, Median, Modus und Spannweite

1. Daten beschreiben und vergleichen



- Wenn man eine größere Anzahl von Daten vorliegen hat, möchte man diese häufig zusammenfassen und miteinander vergleichen. Dazu verwendet man statistische Kennzahlen. Sie beschreiben bestimmte Eigenschaften einer Datensammlung.

- Man unterscheidet zwei Gruppen:

Art der Kennzahl	Bedeutung	Beispiele
Lagemaße (Lageparameter)	Beschreiben, wo die Mitte bzw. ein typischer Wert einer Datensammlung liegt.	Arithmetisches Mittel, Median, Modus
Streuungsmaße (Streuungsparameter)	Beschreiben, wie weit die Werte auseinanderliegen.	Spannweite

- In diesem Lernblatt betrachten wir vier Kennzahlen:

  - Arithmetisches Mittel (Durchschnitt): Wie groß ist ein Wert durchschnittlich?
  - Median (Zentralwert): Welcher Wert liegt in der Mitte der geordneten Daten?
  - Modus (Modalwert): Welcher Wert kommt am häufigsten vor?
  - Spannweite: Wie groß ist der Abstand zwischen dem kleinsten und dem größten Wert?

2. Die vier Kennzahlen bestimmen

2.1 Arithmetisches Mittel (Durchschnitt)

Bedeutung

- Das arithmetische Mittel, auch Durchschnitt genannt, gibt an, wie groß ein Wert durchschnittlich ist.
- Bei seiner Berechnung werden alle Werte berücksichtigt.

Berechnung

- Man addiert alle Werte und teilt die Summe durch die Anzahl der Werte.
- Arithmetisches Mittel = Summe aller Werte : Anzahl der Werte

Beispiel

- Fünf Kinder besitzen unterschiedlich viele Geschwister: 1, 5, 1, 0, 3.
- Rechnung:
  (1 + 5 + 1 + 0 + 3) : 5 = 10 : 5 = 2

  Das arithmetische Mittel beträgt 2 Geschwister.

Besonderheiten

- Das arithmetische Mittel muss nicht als tatsächlicher Wert in der Datensammlung vorkommen.
- Alle Werte müssen in derselben Maßeinheit angegeben sein.
- Besonders große oder kleine Werte (sog. *Ausreißer,* die deutlich von den übrigen Werten einer Datensammlung abweichen) können das arithmetische Mittel stark beeinflussen.
- Beispiel für den Einfluss eines Ausreißers:

  - Geschwisteranzahl: 1, 2, 2, 3, 12
  - Rechnung:
    (1 + 2 + 2 + 3 + 12) : 5 = 20 : 5 = 4

  - Obwohl vier der fünf Werte zwischen 1 und 3 liegen, beträgt der Durchschnitt 4.

2.2 Median (Zentralwert)

Bedeutung

- Der Median, auch Zentralwert genannt, ist der Wert, der in der Mitte einer der Größe nach geordneten Datenreihe liegt.
- Er teilt die geordnete Datenreihe in zwei gleich große Hälften. Mindestens die Hälfte der Werte ist kleiner oder gleich dem Median, mindestens die Hälfte ist größer oder gleich dem Median.

Berechnung und Beispiel

- Alle Werte der Größe nach sortieren.
- Den mittleren Wert bestimmen.
- Fall 1: Ungerade Anzahl von Werten

  - Beispiel: 3, 7, 2, 9, 5
  - Sortierte Datenreihe: 2, 3, 5, 7, 9
  - Der Zentralwert beträgt 5.

- Fall 2: Gerade Anzahl von Werten

  - Wenn eine gerade Anzahl von Werten vorliegt, gibt es keinen einzelnen mittleren

Wert. Man nimmt deshalb das arithmetische Mittel der beiden mittleren Werte.
- Beispiel: 3, 1, 4, 2, 1, 3
- Sortierte Datenreihe: 1, 1, 2, 3, 3, 4
- Rechnung:
  (2 + 3) : 2 = 2,5

- Der Zentralwert beträgt 2,5.

Besonderheiten

- Die Werte müssen vor der Bestimmung des Medians sortiert werden.
- Der Median muss nicht als tatsächlicher Wert in der Datensammlung vorkommen.
- Einzelne besonders große oder kleine Werte beeinflussen den Median deutlich weniger als das arithmetische Mittel.
- Entscheidend ist die Reihenfolge der Werte, nicht der Abstand zwischen ihnen.

2.3 Modus (Modalwert)

Bedeutung

- Der Modus, auch Modalwert genannt, ist der Wert, der in einer Datensammlung am häufigsten vorkommt.

Bestimmung

- Man zählt, wie häufig die einzelnen Werte vorkommen.
- Der Wert mit der größten Häufigkeit ist der Modus.

Beispiel

- Die Anzahl der Geschwister von sieben Kindern: 1, 2, 3, 2, 4, 2, 1
- Der Wert 2 kommt dreimal vor und damit häufiger als alle anderen Werte.
- Der Modus beträgt 2 Geschwister.

Besonderheiten

- Der Modus muss nicht eindeutig sein. Es können auch mehrere Werte gleich häufig am häufigsten vorkommen.
- Er muss immer ein tatsächlich vorkommender Wert der Datensammlung sein.
- Er lässt sich auch bei nicht numerischen Merkmalen bestimmen, bspw. bei der häufigsten Lieblingsfarbe.

2.4 Spannweite

Bedeutung

- Die Spannweite gibt an, wie weit der größte (Maximum) und der kleinste Wert (Mini-

mum) einer Datensammlung auseinanderliegen. Sie ist ein einfaches Maß für die Streuung der Werte.

Berechnung

- Man zieht den kleinsten Wert vom größten ab.
- Spannweite = Maximum – Minimum

Beispiel

- Messwerte: 4, 7, 3, 9, 5, 6
- Minimum: 3
- Maximum: 9
- Rechnung:
  9 – 3 = 6

  Die Spannweite beträgt 6.

Besonderheiten

- Es werden nur der kleinste und der größte Wert berücksichtigt.
- Alle anderen Werte haben keinen direkten Einfluss auf die Spannweite.
- Einzelne extreme Werte können die Spannweite stark vergrößern.
- Die Spannweite sagt nichts darüber aus, wie die übrigen Werte verteilt sind. Sie zeigt bspw. nicht, ob die Werte gleichmäßig zwischen Minimum und Maximum verteilt sind oder ob sich mehrere Werte in der Nähe des Minimums oder Maximums häufen.

3. Taschengeld-Beispiel: Berechnung

- Acht Freunde haben festgestellt, dass sie unterschiedlich viel Taschengeld bekommen:

  12 €, 7 €, 9 €, 21 €, 7 €, 8 €, 13 €, 11 €

- Aufgabe: Bestimme das arithmetische Mittel, den Zentralwert, den Modalwert und die Spannweite.

3.1 Arithmetisches Mittel bestimmen

- Rechnung:
  (12 + 7 + 9 + 21 + 7 + 8 + 13 + 11) : 8 = 88 : 8 = 11

- Das arithmetische Mittel beträgt 11 €.

3.2 Median (Zentralwert) bestimmen

- Zunächst sortiert man die Werte:

7 €, 7 €, 8 €, 9 €, 11 €, 12 €, 13 €, 21 €

- Da acht Werte vorliegen, berechnet man das arithmetische Mittel der beiden mittleren Werte:
  (9 + 11) : 2 = 10

- Der Median beträgt 10 €.

3.3 Modus (Modalwert) bestimmen

- Der Betrag 7 € kommt zweimal vor. Alle anderen Beträge kommen nur einmal vor.
- Der Modus beträgt 7 €.

3.4 Spannweite bestimmen

- Rechnung:
  21 – 7 = 14

- Die Spannweite beträgt 14 €.

4. Taschengeld-Beispiel: Interpretation

- Die vier Kennzahlen beschreiben unterschiedliche Eigenschaften derselben Datensammlung. Am Taschengeldbeispiel lässt sich erkennen, welche Informationen sie jeweils liefern:

  - Das arithmetische Mittel beträgt 11 €. Die acht Freunde erhalten also durchschnittlich 11 € Taschengeld.
  - Der Median beträgt 10 €. Vier der acht Taschengeldbeträge liegen bei höchstens 10 €, vier bei mindestens 10 €.
  - Der Modus beträgt 7 €, denn dieser Betrag kommt mit zwei Nennungen am häufigsten vor.
  - Die Spannweite beträgt 14 €. Der größte Betrag von 21 € liegt also 14 € über dem kleinsten Betrag von 7 €.

- Besonders aufschlussreich ist der Vergleich von arithmetischem Mittel und Median.

  - Das arithmetische Mittel liegt mit 11 € etwas über dem Median von 10 €. Ein Grund dafür ist der höchste Taschengeldbetrag von 21 €. Er geht vollständig in die Berechnung des Mittelwerts ein und hebt ihn an.
  - Für den Median ist dagegen entscheidend, welche Werte in der Mitte der geordneten Datenreihe liegen. Er bleibt deshalb von der Höhe dieses einzelnen Wertes unberührt, solange dieser an der letzten Position der geordneten Datenreihe bleibt.

- Der Modus von 7 € ergänzt diese Betrachtung: Er zeigt, welcher Betrag am häufigsten vorkommt. Er ist jedoch nicht mit dem durchschnittlichen oder mittleren Taschengeld gleichzusetzen. Nur zwei der acht Freunde erhalten diesen Betrag.

- Auch die Spannweite trägt dazu bei, die Daten einzuordnen. Mit 14 € liegen der kleinste und der größte Taschengeldbetrag deutlich auseinander. Das weist auf spürbare Unterschiede zwischen den Taschengeldbeträgen hin. Allerdings lässt sich daraus nicht ablesen, wie die übrigen Beträge verteilt sind. Die Spannweite berücksichtigt ausschließlich die beiden Extremwerte.

- Keine der Kennzahlen Mittelwert, Median, Modus und Spannweite allein beschreibt also die gesamte Datensammlung. Erst in ihrer Gesamtschau liefern sie ein differenzierteres Bild.

5. Übungen

5.1 Wartezeiten an einer Bushaltestelle

An 9 Schultagen wurde gemessen, wie lange Schülerinnen und Schüler an einer Bushaltestelle auf ihren Bus warten mussten. Dabei ergaben sich folgende Wartezeiten in Minuten:

4, 13, 2, 6, 1, 5, 4, 7, 3

a) Berechne das arithmetische Mittel (Durchschnitt).
b) Bestimme den Median (Zentralwert).
c) Bestimme den Modus (Modalwert).
d) Berechne die Spannweite.
e) Interpretiere die Ergebnisse kurz:
- Welchen Einfluss hat die Wartezeit von 13 Minuten auf das arithmetische Mittel?
- Welche Kennzahl beschreibt die typische Wartezeit hier besser – Mittelwert oder Median?
- Beziehe auch den Modus in deine Überlegung ein.

5.2 Effektive Lesezeiten während einer Lesephase

Während einer 20-minütigen Lesezeit in der Schule wurde erfasst, wie viele Minuten 8 Schülerinnen und Schüler tatsächlich gelesen haben. Es ergaben sich folgende Lesezeiten:

16, 12, 8, 20, 14, 10, 18, 12

a) Berechne das arithmetische Mittel (Durchschnitt).
b) Bestimme den Median (Zentralwert).
c) Bestimme den Modus (Modalwert).
d) Berechne die Spannweite.
e) Interpretiere die Ergebnisse kurz:
- Welches Bild vermitteln Mittelwert und Median von den Lesezeiten?
- Wie aussagekräftig ist der Modus in diesem Beispiel?
- Was lässt sich anhand der Spannweite über die Unterschiede zwischen den Lesezeiten sagen?