Äquivalenzumformungen – Lernpapier mit Beispielaufgaben

Wiederholung

Variable, Term, Gleichung

$x + 8 = 20$

- x ist eine **Variable** (= Platzhalter, z. B. für eine Zahl oder eine andere Variable);
- x + 8 links neben dem Gleichheitszeichen ist ein **Term** (= Rechenausdruck);
- x + 8 = 20, also die gesamte Zeile, ist eine **Gleichung**.

Termumformungen

Ähnlich wie man Brüche so weit wie möglich kürzt, vereinfacht man auch Terme so weit wie möglich („Termpresse“), z. B.

	$2m + 4 + 3m$		$5 \cdot (3x - 11 + 4)$
=	$2m + 3m + 4$	=	$15x - 55 + 20$
=	$5m + 4$	=	$15x - 35$

Kurzschreibweisen

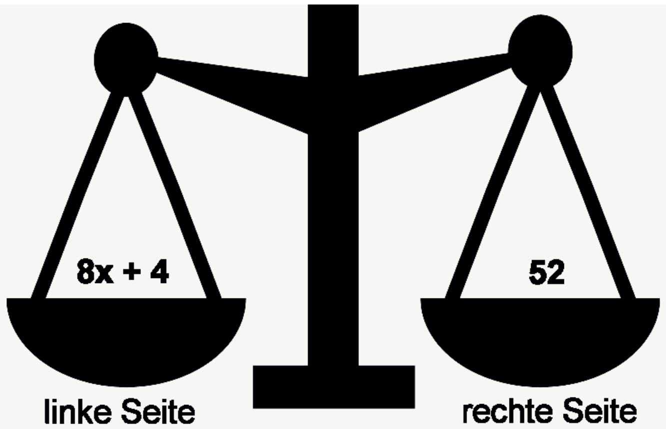
	$+7 \cdot 2$		$5 \cdot a$		$1 \cdot x$		$0 \cdot x$		$+5 \cdot (+3x - 11)$
=	$7 \cdot 2$	=	$5a$	=	$1x$	=	$0x$	=	$5\,(+3x - 11)$
				=	x	=	0		

Einführung

Gleichungen sind Erweiterungen zu Terme, da nun ein weiterer Term „auf der anderen Seite“ des Gleichheitszeichens hinzugefügt wird. **Gleichungen bestehen also aus einem Term links** (im Beispiel oben: x + 8) **und einem Term rechts neben dem Gleichheitszeichen** (oben: 20). Beide Seiten betrachtet man immer zusammen.

Der Wert beider Terme einer Gleichung muss stets „gleich“ sein (daher auch das Gleichheitszeichen). Man sagt: Der Term auf der linken Seite der Gleichung ist **äquivalent** zum Term auf der rechten Seite. Im Beispiel oben muss der Wert von x + 8 also äquivalent sein zu 20. Man kann sich das vorstellen wie eine alte Waage, bei der auf der linken und rechten Seite jeweils das gleiche Gewicht vorhanden sein muss, damit sie im Gleichgewicht ist. Beispiel:

$8x + 4 = 52$



Anmerkung

Man darf die Seiten einer Gleichung vertauschen. Das ist so, als würde man von der „Rückseite" auf die Waage sehen. Also:

$8x + 4 = 52$
ist im Grunde dasselbe wie
$52 = 8x + 4$

In der Mathematik bevorzugt man den Term mit der Variablen nach Möglichkeit auf der linken Seite stehen zu haben.

Ein anderes Vorstellungsmodell ist, dass wir Gleichungen als ein **Zahlenrätsel** betrachten: Welche Zahl wurde durch x versteckt, so dass die Gleichung stimmt (man sagt: eine wahre Aussage hat)? Manchmal bekommt man dies mit einem „scharfen Blick" und etwas Knobelei heraus, doch für schwierige Aufgaben kennt die Mathematik eine spezielle Methode: **Äquivalenzumformungen**. Dabei werden die Seiten einer Gleichung durch **Rückwärtsrechnen** Schritt für Schritt so lange umsortiert, bis die Variable (meist x) auf einer Seite (meist links) alleine steht. Man sagt dazu auch: Die Gleichung wird **nach x aufgelöst**. Die dazu angewandten Äquivalenzumformungen sind jedoch nicht beliebig, sondern müssen bestimmten Regeln gehorchen (z. B. denen des Rückwärtsrechnens), da die Waage sozusagen immer im Gleichgewicht sein muss. Im Beispiel oben sieht das wie folgt aus:

$$\begin{aligned} 8x + 4 &= 52 && \mid -4 \\ 8x &= 48 && \mid :8 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Anmerkung

Achte bei mehreren Zeilen darauf, dass das Gleichheitszeichen stets sauber untereinander steht. Das erhöht die Lesbarkeit.

Wie diese Methode samt Schreibweise genau funktioniert, wollen wir im Folgenden beleuchten.

Beispiel 1

$$x = 10$$

Eine sehr einfache Gleichung. Hier gibt es im Grunde nichts mehr zu tun, denn die Gleichung ist bereits nach x aufgelöst; die rechte Gleichungsseite (10) lässt sich auch nicht weiter vereinfachen. Die Lösung ist unmittelbar ablesbar: Die gesuchte Zahl x ist 10.

Wenn man nun die **Probe** macht und für die Variable x den Wert 10 einsetzt, so stimmt die Gleichung (es kommt eine **wahre Aussage** heraus):

$$\begin{aligned} x &= 10 && \text{nun für x auf der linken Seite die Lösung 10 einsetzen} \\ 10 &= 10 && \rightarrow \text{stimmt, eine wahre Aussage!} \end{aligned}$$

Man sagt: 10 ist die Lösung der Gleichung, oder: 10 erfüllt die Gleichung. Dazu gibt man häufig noch eine sog. **Lösungsmenge** mit **geschweiften Klammern „{“ und „}“** an:

$$L = \{ 10 \}$$

Alle Zahlen in der Lösungsmenge L (hier nur die 10) erfüllen die Gleichung.

Beispiel 2

$$\begin{aligned} 2 \cdot x &= 10 \qquad | :2 \\ \frac{2x}{2} &= \frac{10}{2} \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Es fällt auf, dass bei einigen Zeilen rechts neben der Gleichung ein **senkrechter Strich „|“** steht. Dahinter folgt eine Angabe – die sog. **(Rechen-)Dokumentation** – was man als nächstes rechnen wird (in der ersten Zeile hier: durch 2). Diese Rechnung muss man **auf beiden Seiten der Gleichung** durchführen. Das ist so, wie wenn man auf der linken und rechten Seite einer Waage bspw. 2 Kilogramm dazunimmt (+2) oder 7 Kilogramm wegnimmt (–7) oder eben beide Seiten halbiert (**:**2), wie in unserem Fall oben. Das Ergebnis schreibt man in die nächste (hier: zweite) Zeile. Warum muss man das auf beiden Seiten der Gleichung rechnen? Damit die linke und rechte Seite der Waage „gleich schwer“ bleiben und die Waage weiterhin ausgeglichen ist – oder mathematisch ausgedrückt: damit der linke und der rechte Term der Gleichung äquivalent bleiben.

So weit, so gut. Aber warum rechnet man oben durch 2 und nicht z. B. plus 2? Ganz einfach: Weil auf der linken Seite der Gleichung „2 • x“ steht und unser Ziel ist es, nach x aufzulösen, damit wir ablesen können, welchen Wert x hat. Dabei stört „2 •“ vor x. Wir bekommen es weg, indem wir die Umkehrrechnung anwenden: durch 2.

Den Zwischenschritt der Division durch 2 sehen wir in der zweiten Zeile: Hier wird auf der linken Seite 2x durch 2 geteilt und auf der rechten Seite 10 ebenso. Dargestellt ist dies hier in **Bruchschreibweise**, damit man die **Möglichkeit des Kürzens** leichter sieht. Die Bruchschreibweise ist also der mit einem „**:**“-Zeichen vorzuziehen. Wenn man sicher im Rechnen mit Gleichungen ist, kann man den Zwischenschritt auch weglassen (im Kopf rechnen) und sofort die Ergebniszeile (hier: die dritte Zeile) notieren.

In der dritten Zeile können wir nun die Lösung einfach ablesen: x hat den Wert 5, d. h. 5 ist die Lösung der Gleichung. Machen wir auch hierzu die Probe:

$$\begin{aligned} 2 \cdot x &= 10 \qquad \text{nun für x auf der linken Seite die Lösung 5 einsetzen} \\ 2 \cdot 5 &= 10 \\ 10 &= 10 \qquad \rightarrow \text{stimmt, eine wahre Aussage!} \end{aligned}$$

Das Ergebnis schreiben wir in die Lösungsmenge:

$$L = \{ 5 \}$$

Beispiel 3

$$\begin{aligned} 2x - 4 &= 10 && \mid +4 \\ 2x - 4 + 4 &= 10 + 4 && \mid T \\ 2x &= 14 && \mid :2 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Erste Zeile: Der linke Term ist nun etwas komplexer und es stellt sich die Frage, was man als erstes macht, um nach x aufzulösen: die 2 vor x weg oder –4 dahinter weg? Die Antwort ist klar: Da wir **rückwärtsrechnen**, gilt (nicht Punkt vor Strich, sondern) **Strich vor Punkt**. Wir müssen also zuerst die Strichrechnung mit –4 angehen. Da die Rückwärtsrechnung von Minus bekanntlich Plus ist, schreiben wir +4 in die Dokumentation hinter dem senkrechten Strich rechts.

Im Zwischenschritt der zweiten Zeile sehen wir, wie +4 auf beiden Gleichungsseiten gerechnet wird. Auch hier gilt: Dieser Schritt kann weggelassen (im Kopf gerechnet) werden, wenn man sich sicher fühlt. Neu ist in der zweiten Zeile das „**T**“ in der Dokumentation. Dieses bedeutet **Termumformung** und sagt aus, dass man im nächsten Schritt den Term auf der linken oder den Term auf der rechten oder beide Terme der Gleichung vereinfacht. In unserem Fall bedeutet das links –4 + 4 zu verrechnen und rechts 10 + 4.

Das Ergebnis sehen wir in der dritten Zeile: 2x = 14. Wir haben unser erstes Teilziel erreicht: –4 auf der linken Seite ist verschwunden und jetzt muss nur nach 2• vor dem x weg. Das kennen wir schon aus Beispiel 2: Die Umkehrrechnung für diese Punktrechnung ist **:**2, also rechnen wir dies auf beiden Seiten der Gleichung und erhalten die letzte Zeile samt Ergebnis: x ist gleich 7. Fehlt noch die Lösungsmenge:

$$L = \{ 7 \}$$

Rechnungen in der Dokumentation wie +4 oder **:**2 in der Aufgabe oben nennt man **Äquivalenzumformungen**. Mit ihnen formt man im darauffolgenden Schritt beide Terme einer Gleichung äquivalent um. Wichtig ist, dass Äquivalenzumformungen stets auf der **linken <u>und</u> rechten Seite durchgeführt** werden. In der Aufgabe oben wird bspw. von der dritten zur vierten Zeile der linke <u>und</u> rechte Term durch 2 geteilt. Bei Termumformungen hingegen muss das nicht sein. Hier vereinfacht man nur den Term einer Gleichung, bei dem es erforderlich/sinnvoll erscheint. Wir werden das im Folgenden noch genauer betrachten.

Beispiel 4

Diese Aufgabe ist sehr ähnlich zu Beispiel 3, aber unterscheidet sich in einem Detail:

$$2x + 4 = 10 \qquad \mid -4$$

$$
\begin{aligned}
2x + 4 - 4 &= 10 - 4 && |\ T \\
2x &= 6 && |\ :2 \\
x &= 3 \\
\\
L &= \{ 3 \}
\end{aligned}
$$

Anmerkung

Wir werden in den folgenden Aufgaben die Zwischenschritte wie hier in Zeile 2 vermehrt auslassen und im Kopf rechnen.

Die Äquivalenzumformung von der ersten zur zweiten Zeile lautet diesmal –4 (Umkehrrechnung zu +4 im Term links), wodurch auch der Zwischenschritt in der zweiten Zeile etwas anders aussieht. Als Endergebnis erhalten wir logischerweise ein anderes als in Beispiel 3, nämlich x gleich 3.

Machen wir der Übung wegen eine Probe (mit nunmehr auch professioneller Schreibweise bei der Dokumentation):

$$
\begin{aligned}
2x + 4 &= 10 && |\ x = 3 \text{ einsetzen} \\
2 \cdot 3 + 4 &= 10 && |\ T \\
10 &= 10 && \rightarrow \text{stimmt, eine wahre Aussage!}
\end{aligned}
$$

Beispiel 5

$$
\begin{aligned}
-2x + 6 &= -10 && |\ -6 \\
-2x &= -16 && |\ :(-2) \\
\frac{-2x}{-2} &= \frac{-16}{-2} && |\ T \\
x &= 8 \\
\\
L &= \{ 8 \}
\end{aligned}
$$

Zur Erinnerung: Ziel ist es, x herauszufinden, also nach x aufzulösen. Dazu nutzen wir **Termumformungen** und **Äquivalenzumformungen**. Hier starten wir von Zeile eins zu zwei mit der Äquivalenzumformung –6, deren Resultat wir in Zeile zwei sehen (der Zwischenschritt ist hier ausgelassen!).

Nun folgt von Zeile zwei zu drei die Äquivalenzumformung **:**(–2), weil vor dem x auf der linken Gleichungsseite –2• steht.

Da die Verrechnung von **:**(–2) etwas schwieriger ist, folgt in der dritten Zeile ausnahmsweise der (künftig im Kopf zu rechnende) Zwischenschritt. Dabei wurde wieder die Bruchschreibweise verwendet (vgl. Beispiel 2), um die Möglichkeit des Kürzens (hier: mit –2) besser zu erkennen. So bleibt links nur noch x stehen, was ja unser Ziel war. Auf der rechten Seite kann man mit Hilfe der Bruchschreibweise das Kürzen zu +8, der Lösung, gut erkennen (bedenke: Minus durch Minus ergibt Plus).

Beispiel 6

Es wird zunehmend komplexer. Diesmal mit einer Minusklammer:

$$
\begin{array}{rcll}
-(x - 3 + 6) & = & 0 & \mid T \\
-x + 3 - 6 & = & 0 & \mid T \\
-x - 3 & = & 0 & \mid +3 \\
-x & = & 3 & \mid \cdot (-1) \\
-x \cdot (-1) & = & 3 \cdot (-1) & \mid T \\
x & = & -3 & \\
 & & & \\
L & = & \{ -3 \} &
\end{array}
$$

Wir starten mit einer Termumformung auf der linken Seite. Dabei wird die **Minusklammer** aufgelöst. Die rechte Gleichungsseite mit 0 bleibt unberührt und wird abgeschrieben (deswegen handelt es sich hier auch um *keine* Äquivalenzumformung!).

Das gleiche gilt für den Schritt von der zweiten zur dritten Zeile: Links kann durch eine Termumformung + 3 – 6 verrechnet werden, so dass sich –3 in Zeile drei ergibt.

Es folgt die erste Äquivalenzumformung der Aufgabe, nämlich +3. Im Ergebnis von Zeile vier, nämlich $-x = 3$, haben wir fast schon das Endergebnis stehen – aber nur fast: Denn unser Ziel ist nach x aufzulösen, nicht nach –x!

In Zeile vier stellt sich also die Frage, wie man nun auf der linken Seite das Minus vor x eliminiert. Dazu kennt man in der Mathematik einen Trick: Man rechnet als **Äquivalenzumformung • (–1)**, denn diese **dreht alle Vorzeichen um.** Erklärung: Aufgrund der 1 ändern sich die Beträge der Terme auf beiden Gleichungsseiten nicht; das Minus sorgt aufgrund der Regel „Minus mal Minus ergibt Plus“ dafür, dass das Minus vor x verschwindet (bzw. zu Plus wird). Der (wieder ausnahmsweise notierte) Zwischenschritt in Zeile fünf verdeutlicht wie das funktioniert: $-x \cdot (-1)$ auf der linken Seite führt zum ersehnten Ziel von x in der letzten Zeile. Auf der rechten Gleichungsseite muss man ebenso mit –1 multiplizieren, wodurch am Ende –3 als Lösung resultiert.

Wir gönnen uns wieder eine Probe:

$$
\begin{array}{rcll}
-(x - 3 + 6) & = & 0 & \mid x = -3 \text{ einsetzen} \\
-(-3 - 3 + 6) & = & 0 & \mid T \\
-(0) & = & 0 & \mid T \text{ (es gilt: } -0 = +0 = 0) \\
0 & = & 0 & \rightarrow \text{stimmt, eine wahre Aussage!}
\end{array}
$$

Beispiel 7

3 (–5 + 2x – 7)	=	–42	| T
3 (–5 – 7 + 2x)	=	–42	| T
3 (–12 + 2x)	=	–42	| T
–36 + 6x	=	–42	| +36
6x	=	–6	| **:**6
x	=	–1	
L	=	{ –1 }	

> **Anmerkung**
>
> Ein „heißer Tipp" zum Lösen von Gleichungen ist, **erst alle möglichen Termumformungen vorzunehmen und danach die Äquivalenzumformungen**. Dadurch wird das Lösen von Gleichungen effizienter und die Gefahr von Fehlern wird minimiert. Zwar gilt dieser Tipp nicht ultimativ für alle Gleichungen, aber für viele, so auch hier in Beispielaufgabe 7.
> Hinsichtlich der Äquivalenzumformungen ist es ferner so, dass **meist erst die Strichrechnungen vorgenommen werden und danach die Punktrechnungen**. Am Ende folgt häufig eine Division, um x endgültig freizustellen. Dies liegt im Wesen des Rückwärtsrechnens begründet, nämlich dass Strich- vor Punktrechnung erfolgt.

In Zeile eins liegt links ein **Distributivgesetz** vor. Man könnte dieses jetzt direkt anwenden. Alternativ kann man in der Klammer zuerst –5 und –7 miteinander verrechnen. Dazu wiederum kann man beide Werte hintereinander schreiben wie in Zeile zwei. Nötig ist dies jedoch nicht, wenn man es im Kopf rechnen möchte. Aber Vorsicht: Bei –5 – 7 kann man sich leicht vertun, denn es kommt nicht bspw. –2 heraus (das Resultat von 5 – 7!), sondern –12.

Im Übergang von Zeile drei zu vier wurde das Distributivgesetz angewendet.

Von Zeile fünf zu sechs gilt es nochmal aufzupassen: Um die 6 vor x zu entfernen, darf man nicht –6 rechnen, wie man meinen könnte, sondern **:**6, weil die 6 ja mittels Multiplikation mit dem x verbunden ist (6x = 6 • x).

Rufen wir uns das eingangs erwähnte Modell in Erinnerung, Gleichungen als Zahlenrätsel zu betrachten. Dann kann man hier sagen: Ich denke mir eine Zahl x, verdopple sie (2•), addiere das Ergebnis zu –5, ziehe davon 7 ab (–7), multipliziere das Ergebnis mit 3 und erhalte –42. Welche Zahl habe ich mir ausgedacht? Es ist –1 (siehe Lösung). So kompliziert kann man –1 in einem Zahlenrätsel verstecken!

Beispiel 8

Bisher kam stets nur **eine einzige Lösung (Zahl) in der Lösungsmenge L** vor. Aber es geht auch anders; deswegen verwendet man auch eine Lösungs<u>menge</u> für L, in der prinzipiell mehrere Lösungen stehen können. Sehen wir uns das mal an:

x = x + 2

> **Anmerkung**
>
> Die gleiche Variable (hier: x) an mehreren Stellen der Gleichung (hier: auf der linken und rechten Seite) bedeutet, dass dahinter die **jeweils gleiche Zahl** verborgen ist.

Auch ohne Term- und Äquivalenzumformungen sieht man mit einem „scharfen Blick", dass hier etwas merkwürdig ist: Eine Zahl x (links) soll genauso groß (gleich) wie die selbe Zahl x plus 2 (rechts) sein. Das kann doch nicht funktionieren! Treten wir den Beweis an:

$$\begin{aligned} x &= x + 2 && \mid -x \\ x - x &= x + 2 - x && \mid T \\ 0 &= 2 && ↯ \rightarrow \textbf{Widerspruch}\text{, eine unwahre Aussage!} \end{aligned}$$

Es fällt auf, dass im Zuge des Auflösens der Gleichung nach x **die Variable x verschwindet**. Das ist ein besonderer Fall. An Ende steht in der letzten Zeile dann eine Aussage wie wir sie eigentlich von einer Probe kennen. Aber wir haben hier keine Probe gerechnet, sondern eine „ordentliche Gleichungsberechnung“ durchgeführt. Was bedeutet das nun?

Wir haben keinen Rechenfehler gemacht und am Ende kommt mit 0 gleich 2 eine **unwahre Aussage** heraus, die Gleichung kann also nicht stimmen. Man kennzeichnet dies durch einen **„Widerspruchsblitz“** ↯, den man wie oben dargestellt in der Dokumentation notiert. Folglich gibt es **keine Lösung für die Gleichung** $x = x + 2$. Noch besser verständlich wird dies, wenn wir wieder an Zahlenrätsel denken: Gemäß der Gleichung denke ich mir eine Zahl x aus, die genauso groß wie die selbe Zahl plus 2 sein soll. **Eine solche Zahl kann es nicht geben**, das Zahlenrätsel hat keine Lösung. Als Lösungsmenge notiert man die sog. **Leere Lösungsmenge**, also eine Menge, die keinen Inhalt hat:

$$L = \{\,\}$$

Beispiel 9

Ein weiteres Beispiel für eine Leere Lösungsmenge bietet folgende Aufgabe:

$$x : 0 = 12 \qquad ↯$$

$$L = \{\,\}$$

Als Zahlenrätsel: Ich denke mir eine Zahl x, dividiere sie durch Null und erhalte 12. Eine solche Zahl kann es nicht geben, denn die **Division durch Null ist verboten**.

Es nutzt auch nichts als mögliche Äquivalenzumformung •0 zu rechnen. Dann käme als vermeintliche Lösung $x = 0$ heraus. Aber im Zuge der Probe erkennen wir: $0 \cdot 0$ ergibt nicht 12 – eine unwahre Aussage in der Probe. Überhaupt sind das **Dividieren und Multiplizieren mit Null verbotene Äquivalenzumformungen**, weil sie das Ergebnis einer Gleichung verfälschen.

Beispiel 10

Unsere Gleichungen können bisher also eine oder keine Lösung enthalten. Doch es gibt noch weitere Möglichkeiten. Alle zu erkunden würden an dieser Stelle zu weit führen, doch eine Variante, die später noch vertieft wird, können wir zumindest anreißen:

$$x^2 = 25$$

Neu ist hier, dass hinter dem x ein „**hoch 2**“, also ein **Quadrat**, steht. Wie wir wissen, ist das eine Kurzschreibweise für x • x (ein Beispiel mit Zahlen wäre: $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$). Es soll also x • x gleich 25 ergeben:

$$x \cdot x = 25$$

Später werden wir lernen, dass die Umkehrrechnung zum Quadrieren das Wurzelziehen ist. Doch hier begnügen wir uns mit einem „scharfen Blick“: Welche Zahl mit sich selbst multipliziert ergibt 25? Genau, es ist x = 5, denn – Probe – 5 • 5 ist gleich 25.

$$x = 5$$

Aber es gibt noch eine weitere Lösung! Dazu machen wir uns die Rechenregel zunutze, dass Minus mal Minus gleich Plus ergibt. Dann gilt, dass aus –5 • (–5) ebenso 25 resultiert.

$$x = -5$$

Schreiben wir die Rechnung nun vollständig in korrekter Schreibweise und Dokumentation auf. Dabei nummerieren wir beide x-Lösungen, indem wir unten (nicht oben!) rechts an das x jeweils eine kleine Zahl setzen: x_1 für die erste Lösung und x_2 für die zweite.

$$\begin{aligned} x^2 &= 25 && \mid T \\ x \cdot x &= 25 && \mid \text{Wurzelziehen bzw. bei uns noch: „scharfer Blick“} \\ x_1 &= 5 \\ x_2 &= -5 \end{aligned}$$

In der Lösungsmenge werden die einzelnen Lösungen dann der Größe nach sortiert und durch ein Semikolon „ **;** “ getrennt notiert.

$$L = \{ -5; 5 \}$$