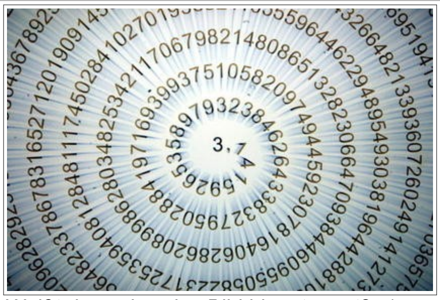
<u>Zahlenmengen</u>



Weißt du, woher das Bild hier stammt? :-)

Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$

$\mathbb{N}_0 = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$

Die einfachsten Zahlen: Mit diesen lernt man rechnen, wobei die Zahlen im weiteren Verlauf natürlich unendlich groß werden.

Anmerkung

- Zuweilen wird in der Mathematik unterschiedlich definiert, ob die 0 (Null) zu den natürlichen Zahlen gehört oder nicht. Wir wollen in Zukunft der Einfachheit wegen jedoch davon ausgehen, dass die Null dazugehört, also $0 \in \mathbb{N}$ (lies: „Null *ist Element von* der Menge der natürlichen Zahlen“).

Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$

„Alles, was rund ist“: Die natürl. Zahlen mitsamt den jeweiligen (negativen) Gegenzahlen.

Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q} = \{-22; -7{,}2344441; 0; \frac{3}{4}; 54; 109{,}\overline{3}; \dots\}$

Bruchzahlen: Zahlen, die als Dezimalbruch und als Bruchstrich-Bruch darstellbar sind, wobei dieser entweder **abbrechend oder periodisch** ist (natürliche und ganze Zahlen zählen dazu). Sie können also durch die Division zweier rationaler Zahlen erzeugt werden.

Irrationale Zahlen $\mathbb{I}$

Anmerkungen

- Für die irrationalen Zahlen existiert kein offizielles Zeichen; dennoch wird häufig $\mathbb{I}$ verwendet.
- Der Backslash „\“ bedeutet „ohne“ (Differenz).

$\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{\pi$ (Pi); e (Eulersche Zahl); $\sqrt{2}$; 0,101001000…; ...}

„Unendlich lang ohne Periode“: Zahlen, die nur als Dezimalbruch darstellbar sind, wobei dieser **nicht abbrechend <u>und</u> nicht periodisch** ist. Sie können also *nicht* durch die Division zweier rationaler Zahlen erzeugt werden.

Reelle Zahlen $\mathbb{R}$

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \{-22; -7{,}2344441; 0; \frac{3}{4}; 54; 109{,}\overline{3};$
π (Pi); e (Eulersche Zahl); $\sqrt{2}$; 0,101001000…; …}

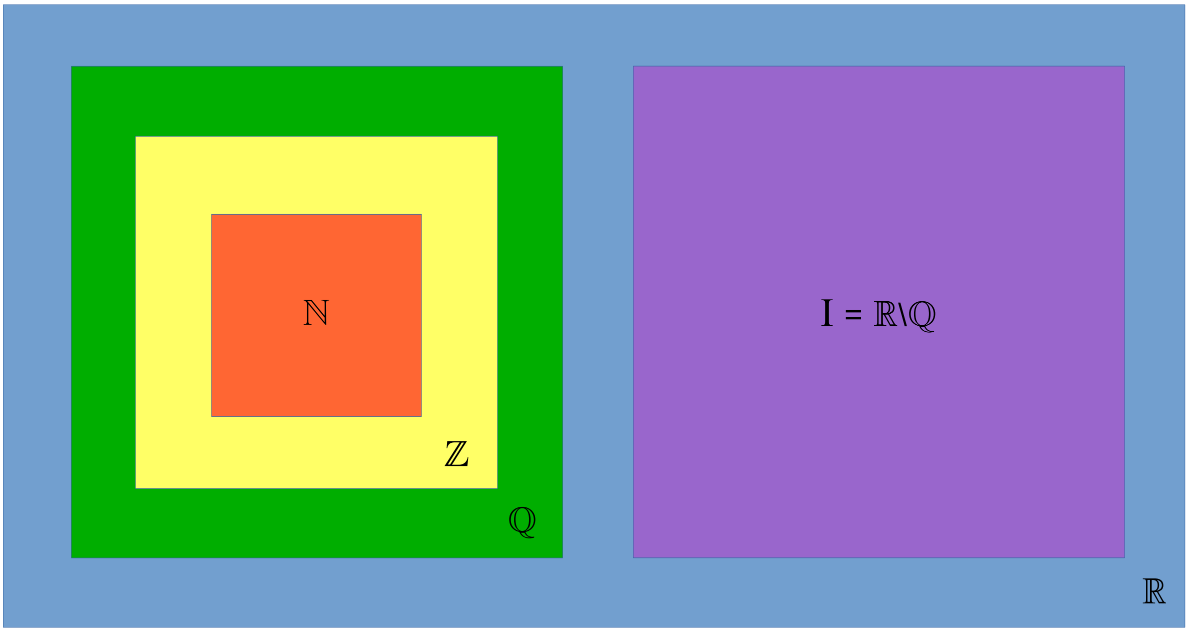
Anmerkung

- Das Zeichen „$\cup$“ beschreibt die „Verschmelzung“ beider Zahlenmengen (Vereinigung).

(Fast) alle Zahlen: Die rationalen Zahlen mitsamt den irrationalen Zahlen. Sie ergeben den in der Mathematik vielleicht bedeutendsten Zahlenbereich, der (fast) alle Zahlen umfasst – zumindest alle, die für uns im Alltag (Schule) relevant sind.

Zusammenfassung

Den Zusammenhang zwischen den Zahlenbereichen kann man grob wie folgt darstellen:



Dabei erkennt man, dass bspw. die Zahl –42 zu den ganzen Zahlen, zu den rationalen Zahlen und zu den reellen Zahlen gehört, jedoch nicht zu den natürlichen Zahlen. Man schreibt:

$-42 \in \mathbb{Z}$; $-42 \in \mathbb{Q}$; $-42 \notin \mathbb{N}$

Jede natürliche Zahl ist also auch eine ganze Zahl und eine rationale Zahl und eine reelle Zahl. Umgekehrt ist aber nicht jede reelle Zahl eine rationale Zahl oder eine ganze Zahl oder eine natürliche Zahl. Man schreibt:

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Zum weiteren Verständnis kann eine anschauliche Analogie aus dem Bereich der Geographie herhalten: Nehmen wir zum Beispiel die Menschen, die in den Regionen Gießen (stellvertretend für natürliche Zahlen), Hessen (ganze Zahlen) und Deutschland (rationale Zahlen) leben. Dann könnte man sagen: Ein Gießener ist zugleich ein Hesse und ein Deutscher (eine natürliche Zahl wie 42 ist zugleich eine ganze Zahl und eine rationale Zahl). Ein Deutscher wiederum muss aber kein Hesse sein und erst recht kein Gießener (eine rationale Zahl wie ein Sechstel ist keine ganze Zahl und auch keine natürliche).

Anmerkungen

- Man kategorisiert die Zahlen so eng wie möglich ein: 13 ist zwar auch eine rationale Zahl, aber letztlich eine natürliche. Daher schreibt man $13 \in \mathbb{N}$ (und eher nicht $13 \in \mathbb{Q}$, obwohl dies korrekt ist).
- Zahlen können sich auch „verkleiden“: So ist bspw. zehn Fünftel = $2 \in \mathbb{N}$ und 50 % = 50 Hundertstel = $0{,}5 \in \mathbb{Q}$.
- $A \subset B$ bedeutet: A ist eine Teilmenge von B, d. h. alle Elemente (hier: Zahlen) von A sind auch Elemente von B.

Eine nicht (!) ganz einfache Bonusfrage zum Abschluss: Welche Zahlenmenge ist die „größte“?