Wurzelgesetze

Multiplikationsregel

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ für $a, b \geq 0$

z.B. $\sqrt{16} \cdot \sqrt{9} = \sqrt{16 \cdot 9} = \sqrt{144} = 12$

[oder: $= 4 \cdot 3 = 12$]

Divisionsregel

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ bzw. $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b}$ für $a \geq 0$, $b > 0$

z.B. $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{16}{4}} = \sqrt{4} = 2$

[oder: $= \frac{4}{2} = 2$]

Merke: Die Regeln greifen nur bei $\cdot$ / $:$, nicht bei $+$ / $-$
(Näheres dazu siehe unten)!

Distributivgesetz: Ausmultiplizieren

$$\sqrt{a} \cdot \left(\sqrt{b} + \sqrt{c}\right) = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + \sqrt{a} \cdot \sqrt{c} = \sqrt{ab} + \sqrt{ac}$$

für $a, b, c \geq 0$

z. B. $\sqrt{3} \cdot \left(\sqrt{27} + \sqrt{3}\right) = \sqrt{3} \cdot \sqrt{27} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{81} + \sqrt{9}$

$= 9 + 3 = 12$

Distributivgesetz: Ausklammern

$x\sqrt{a} + y\sqrt{a} = (x+y) \cdot \sqrt{a}$ für $a, x, y \geq 0$

z. B. $6 \cdot \sqrt{7} - 4 \cdot \sqrt{7} = (6-4) \cdot \sqrt{7} = 2 \cdot \sqrt{7}$

Teilweises Wurzelziehen

$$\sqrt{ba^2} = \sqrt{b} \cdot \sqrt{a^2} = a\sqrt{b}$$

z. B. $\sqrt{54} = \sqrt{9 \cdot 6} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{6} = 3\sqrt{6}$

Ziel: Multiplikation mit einer Quadratzahl als Faktor

Multiplikationsregel „rückwärts" angewendet

$$\sqrt{5x^2} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{x^2} = x\sqrt{5}$$

Warum gibt es keine Additions- und Subtraktionsregel?

$\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$, aber $\sqrt{9} + \sqrt{16} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$
gilt nicht (ist falsch)!

$\sqrt{16} - \sqrt{9} = 4 - 3 = 1$, aber $\sqrt{16} - \sqrt{9} = \sqrt{16-9} = \sqrt{7} \in \mathbb{I}$
gilt nicht (ist falsch)!

Darüber hinaus gilt (vgl. 1. Binomische Formel)

$\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$, denn $a^2 + b^2 \neq (a+b)^2$

(Zur Erinnerung: $(a+b)^2 = a^2 \underline{+ 2ab} + b^2$)

Bsp.: $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$ ist korrekt, aber
$\sqrt{3^2 + 4^2} = 3 + 4 = 7$ ist falsch!

Merke (Unterschied)

$\sqrt{x^2 \cdot y^2}$ | $\sqrt{x^2 + y^2}$
$= \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y^2}$ | = geht nicht kürzer
$= x\,y$

[analog bei : bzw. −]